ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Tomus 32 (1996), 9 – 12

ТЕОРЕМА РИМАНА–РОХА И ТЕОРЕМА О РАЗМЕРНОСТИ МИНИМАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Данило Растович

Введение.

Построение различных канонических форм для конечно-мерных динамических систем рассматривается как важное средство проектирования указаных систем. Надо вычислить размерность минимальной реализации. Система называется минимальной если наблюдаема и управляема. Представляя динамическую систему в виде обычного "черного ящика", можно заметить, что такая система зависит от трех параметров, а именно от вектора входного сигнала, вектора состояния и выходного вектора. Часто предполагается, что функционирование системы во времени линейно по этим параметрам. В этом случае линейная система определяется следующими данными:

(I) некоторое кольцо k

(II) три левых k-модуля U, H, Y (пространства входных сигналов, состояний и выходных сигналов соответственно)

(III) четыре отображения $A \in \mathrm{Hom}_k(H, H)$, $B \in \mathrm{Hom}_k(U, H)$, $C \in \mathrm{Hom}_k(H, Y)$ и $D \in \mathrm{Hom}_k(U, Y)$

Функционирование такой системы в дискретные моменты времени задается следующими соотношениями:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad y = Cx(t) + Du(t)$$

Мы будем называть введенный объект машиной (над k). Если фиксировать базисы пространств U, H и Y, то отображения (III) будут задаваться некоторыми матрицами.

§1. В случае скалярных входных и выходных сигналов частотная характеристика является рациональной т.е.

$$T(s) = \frac{f(s)}{X(A, s)}$$

1991 *Mathematics Subject Classification*: 93B.
Key words and phrases: Riemann Roch theorem, minimal realization.
Received January 3, 1995.

где $X(A,s)$ есть характеристически полином. В этом случае дискретную проблему реализации можно сформулировать следующим образом: задана рациональная функция $f(s)/g(s)$ такая, что $g(s)$ полином степени n, $\deg f(s) \leq n-1$, найти минимальную машину (A,b,c) со скалярными входными и выходными сигналами и с частотной характеристикой $f(s)/g(s)$.

Пусть k алгебраически замкнутое поле и K поле функций над k от одной переменной (короткое функциональное поле). Точкой поля K над k будем называть любое содержащее k кольцо дискретного нормирования в K (или кольцо над k).

Множество всех таких колец (т.е. точек поля K) называется кривой, а K-полем функций на ней.

Дивизорами (кривой или поля K над k) мы будем называть элементы свободной абеловой группы, порожденной точками. Всякий дивизор есть формальная сумма $a = \Sigma n_i P_i$ где P_i-точки, $n_i \in Z$. Сумму $\Sigma n_i = \Sigma n_P$ назовем степенью дивизора a, а n_i-его порядком в P_i.

Рациональная функция $\varphi(s) = f(s)/g(s)$ определяется нулями многочленов f и g, т.е. точками, в которых она обращается в 0 или нерегулярна. Чтобы отличать корни g от корней f, мы быдем брать их кратности со знаком минус.

Дивизор функции φ обозначается через (φ).

Назовем дифференциалом λ поля K любой k-линейный функционал, обращающийся в нуль на некотором пространстве $\Lambda(a)$ и на K, ([6]).

Дифференциалы образуют векторное пространство над K. Пусть λ-ненулевой дифференциал. Любой другой дифференциал имеет вид $\varphi \cdot \lambda$.

Дивизор дифференциала $\varphi\lambda$ будет $a+(\varphi)$. Этот класс дивизоров называется каноническим классом поля K, а любой дивизор из него называется каноническим дивизором.

Для любого дивизора a множество $L(a)$ будет линейным пространством над полем констант k. Обозначим его размерность через $\ell(a)$.

Если a положителен, то $L(a)$ состоит из всех функций в K, полосы которых лежат в a.

Теорема Римана-Роха заключается в равенстве

$$\ell(a) - \ell(c-a) = \deg a - g + 1$$

где a-произвольный дивизор на глаткой проективной кривой, c ее канонический класс, а g-род.

Будем вычислить размерность минимальной реализации в проективном представлении.

Пусть a-произвольный дивизор поля K и c любой дивизор из канонического класса.

Пусть a и c положительны дивизори и $c-a$ есть положительный дивизор, такой, что $\ell(c-a)$ есть максимальное число.

Теорема 1.1. *Размерность минимальных реализаций есть $\ell(c-a)$. Она вычисляется по формуле $\ell(c-a) = \ell(a) - \deg(a) + g - 1$.*

Доказательство. Поэтому что $c - a = (\varphi) + a - a$, а размерность есть максимальное число порядка минора якобиана, различного от нуля это будет степень Мек Милана по результате из [3]. Выражение для $\ell(c-a)$ следует из теоремы Римана-Роха для дивизоров.

§2. Для машин, функционирующих в непрерывном времени траектории такой системы задаются дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad y(t) = c^{\top}x(t) + du(t)$$

причем здесь предполагается, что k есть поле вещественных или комплексных чисел.

Основная проблема синтеза систем - это проблема реализации, которая состоит в нахождении машины (A, b, c) с заранее заданной частотной характеристикой

$$T(s) = ((A - sl)^{-1}b, c).$$

Классическая теорема Римана-Роха является основной теоремой теории алгебраических кривых.

Пусть V_n есть алгебраическое многообразие комплексной размерности n. Тогда $\dim H^2(V_2, F) = \dim H^0(V_2, K \otimes F^{-1})$ по теореме двойственности Серра и $\dim H^1(V_1, F) = \dim H^0(V_1, K \otimes F^{-1})$ где K одномерное векторное расслоение, определенное каноническим классом дивизоров.

Если F представлен дивизором, что всегда возможно, то $\deg F$ равно числу нулей минус число полюсов дивизора.

Пусть P^1 – 1-мерное проективное пространство, точка которого $x \in P^1$ задается элементами (x_0, x_1) поля k.

Пусть $T(s)$ есть частотная характеристика, такая, что $\lim_{s\to\infty} T(s) = 0$.

Можно определить рациональное отображение $S^2 \to P^1$.

Теорема Римана-Роха для алгебраических кривых утверждает, что $x(V_1, F) = \deg F + 1 - g$, где x арифметически род.

Теорема 1.2. *Степень Мек Милана можно вычислить, по теореме Римана-Роха, по формуле* $\delta(t) = \dim H^0(P^1, Z) - \deg(Z) - 1$.

Доказательство. По результате Мартин-Хермана ([5]) первый класс Чженя $c_1 \in H^2(S^2, Z)$ есть степень Мек Милана $\delta(t)$ т.е. размерностъ минимальной реализации. Из теоремы двойственности следует, что $x(P^1, Z) = \dim H^0(P^1, Z) - \dim H^1(P^1, Z)$ т.е. $x(P^1, Z) = \dim H^0(P^1, Z) - \dim H^0(P^1, K \otimes Z^{-1})$ и, следовательно по теореме Римана-Роха превращается в

$$\dim H^0(P^1, Z) - \dim H^0(P^1, K \otimes Z^{-1}) = 1 - g + \deg(Z)$$

где $g = \text{род} P^1 = 0$, так, что степень Мек Милана есть

$$\delta(t) = \dim H^0(P^1, Z) - \deg(Z) - 1.$$

Список литературы

[1] Шафаревич И.Р. *Основы алгебраической геометрии* Наука, 1972.
[2] Severi F., *Il teorema di Riemann-Roch per curve - superficie, e varieta questioni collegate*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 17 Springer-Verlag, 1958.
[3] Pugh A.C., *The Mc Millan degree of a polynomial system matrix*, Int. J. Control, 1, 24, 1976, 129-135.
[4] Hirzebruch F., *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York Inc., New York 1966.
[5] Hermann R., *Linear system theory and introductory algebraic geometry*, vol.8, Brookline, Mass., Interdisciplinary Math., 1974.
[6] Lang S., *Introduction to algebraic and abelian functions*, Addison-Wesley Bibl. Comp., Massachussetts, 1972.

Адрес автора:
Danilo Rastovich
Higher Technical School
Konavljanska 2
Zagreb, CROATIA