ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Tomus 28 (1992), 35 – 49

ЧИСЛО ЛЕВЕНГЕЙМА ДЛЯ ОДНОГО ИЗ СКЕЛЕТОВ МНОГООБРАЗИЙ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

А. Г. Пинус

Dedicated to Professor F. Šik on the occasion of his seventieth birthday

Abstract. Вводятся понятия свободного эпискелета и числа Левенгейма для свободного эпискелета произвольного многообразия алгебр. Доказывается, что число Левенгейма для свободного эпискелета многообразия булевых алгебр совпадает с числом Левенгейма полной логики второго порядка.

Понятия скелетов многообразий алгебр были введены автором в работах [2], [3] и затем, в целом ряде дальнейших работ, довольно подробно изучалисьскелеты конгруэнц-дистрибутивных многообразий . В частности, в работах [4], [5] доказана неразрешимость элементарных теорий скелетов эпиморфности и декартова для нетривиальных конгруеэнц-дистрибутивных многообразий , а в работе [6] - неразрешимость элементарной теории скелета вложимости произвольного многообразия содержащего неодноэлементную квазипримальную алгебру.

Если $\mathfrak{K}$-произвольный класс алгебр, то через $\mathfrak{I}\mathfrak{K}$ обозначим совокупность всех типов изоморфизма $\mathfrak{K}$-алгебр. На совокупости $\mathfrak{I}\mathfrak{K}$ вводим отношения квазипорядков $\ll, \ll$ и операции, возможно частичные, произведений $\times, *$: для $a, b, c \in \mathfrak{I}\mathfrak{K}$ $\quad a \ll b (a \leq b)$ тогда и только тогда, когда алгебра типа a является гомоморфным образом алгебры типа b (алгебра типа a вложима в алгебру типа b), $a \times b = c \quad (a * b = c)$ тогда и только тогда, когда алгебра типа c изоморфна декартову (свободному в $\mathfrak{K}$) произведению алгебр типа a и b. Скелетом эпиморфности (вложимости, декартовым, свободным) произвольного многообразия $\mathfrak{M}$ называется квазиупорядоченный класс $\langle \mathfrak{I}\mathfrak{M}; \ll \rangle \quad (\langle \mathfrak{I}\mathfrak{M}; \leq \rangle$, соответственно класс с полугрупповой операцией $\langle \mathfrak{I}\mathfrak{M}; \times \rangle$, $\langle \mathfrak{I}\mathfrak{M}; * \rangle)$. Свободным эпискелетом многообразия $\mathfrak{M}$ назовем алгебраическую систему вида $\langle \mathfrak{I}\mathfrak{M}; *, \ll \rangle$, т.е. квазиупорядоченный класс наделенный полугрупповой операцией $*$ согласованной с квазипорядком $\ll$. Для любого кардинала k через $\mathfrak{M}_{<k}$

Key words and phrases: многообразия алгебр, логика второго порядка, скелеты многообразий , числа Левенгейма.
Received March 23, 1990.

обозначим совокупность$\{\mathfrak{A} \in \mathfrak{M} |\ |\mathfrak{A}| < k\ \}$. Ограниченным скелетом эпиморфности многообразия $\mathfrak{M}$ называется квазиупорядочное множество $\langle \Im\mathfrak{W}_{<k}; \ll\rangle$. Аналогично определяются и другие ограниченные скелеты на $\Im\mathfrak{W}_{<k}$. Таким образом, ограниченный свободный эпискелет $\mathfrak{M}$ является квазиупорядоченной полугрупой . Далее не будем придерживаться отличия между алгеброй и ее типом изоморфизма.

Естественно предположить, что для больших кардиналов ограниченные скелеты произвольного многообразия $\mathfrak{M}$ наследуют основные свойства скелетов. В частности, речь может идти о наследовании элементарных свойств. При этом, наиболее интересным представляется не просто совпадение элементарных теорий ограниченных и неограниченных скелетов, а существование для любого набора $\mathfrak{M}$-алгебр $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ набора алгебр $\mathfrak{A}'_1, \ldots, \mathfrak{A}'_n$ из ограниченного класа $\mathfrak{M}_{<k}$ элементарные свойства которых в терминах соответствующего скелета в классе $\mathfrak{M}_{<k}$ совпадают с аналогичными свойствами алгебр $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ во всем многообразии $\mathfrak{M}$. То есть речь идет о реализуемости элементарных типов кортежей элементов неограниченных скелетов в ограниченных.

Числом Левенгейма для скелета эпиморфности многообразия $\mathfrak{M}$ назовем наименьший кардинал k такой , что для любых $\mathfrak{M}$-алгебр $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ $(n \in \omega)$ найдутся кардинал $k' \leq k$ и алгебры $\mathfrak{A}'_1, \ldots, \mathfrak{A}'_n \in \mathfrak{M}_{<k'}$ такие, что элементарные теории моделей $\langle \Im\mathfrak{M}; \ll, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n\rangle$ и $\langle \Im\mathfrak{M}_{<k'}; \ll, \mathfrak{A}'_1, \ldots, \mathfrak{A}'_n\rangle$ совпадают. Аналогичным образом вводится понятие числа Левенгейма для других скелетов многообразия. Через $\ell^{\ll,*}_{\mathfrak{M}}$ будем обозначать число Левенгейма для свободного многообразия $\mathfrak{M}$. Через $\ell^{\ll,\leq,\times}$ обозначим число Левенгейма скелета $\langle \Im\mathfrak{M}; \ll, \leq, \times\rangle$.

Полной логикой второго порядка называется расширение узкого исчисления предикатов с помощью формул в которых допускается навешивание кванторов существования и всеобщности по произвольным предикатам. Числом Левенгейма полной логики второго порядка ℓ^{II} называется наименьший кардинал k такой , что для произвольной алгебраической системы $\mathfrak{A}$ конечной сигнатуры существует алгебраическая система $\mathfrak{A}'$ мощности не превосходящей k и такая, что теории систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ в полной логике второго порядка совпадают. Локализация числа Левенгейма для полной логики второго порядка на кардинальной шкале зависит от теоретико-множественных предположений (см. к примеру [8]).

В работе [7] доказано неравенство $\ell^{\ll,\leq,\times}_{\mathfrak{M}} \leq \ell^{II}$ для любого конечно базируемого многообразия $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры. Без труда замечается, что доказательство этого неравенства остается справедливым и при добавлении в сигнатуру скелета операции $*$. Таким образом, для конечно базируемых мнообразий конечной сигнатуры имеет место, в частности, неравенство $\ell^{\ll,*}_{\mathfrak{M}} \leq \ell^{II}$. В той же работе на примере категоричных многообразий замечено, что неравенство $\ell^{\ll,\ll,\times}_{\mathfrak{M}} \leq \ell^{II}$ может быть строгим и там же доказано так же равенство $\ell^{\times}_{\mathfrak{M}} = \ell^{II}$ (а, значит, и $\ell^{\ll,\ll,\times}_{\mathfrak{M}} = \ell^{II}$) для любого нетривиального конечно базируемого конгруэнц-дистрибутивного многообразия $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры все алгебры которого содержат подалгебру изоморфную некоторой фиксированной простой $\mathfrak{M}$ - алгебре. Содержание же данной работы сводится к доказательству равенства $\ell_{\mathfrak{M}}^{\ll,*} = \ell^{II}$ для многообразия булевых алгебр. Обозначим последнее как BA.

Если L - некоторое линейно упорядоченое множество (лум) с первым - a и последним элементами, то через $B(L)$ обозначим интегральную булеву алгебру порожденную L , т.е. булеву алгебру подмножеств множества $L \setminus \{a\}$ порожденую интервалами вида $(c, d]$, где $c, d \in L$. При этом лум L будем отождествлять с линейно упрядоченным подмножеством элементов булевой алгебры $B(L)$ вида $(a, b]$, где $b \in L$. Для любой булевой алгебры $\mathfrak{B}$ и любого ее элемента a через $\mathfrak{B} \upharpoonright a$ обозначим булевую алгебру индуцированую алгеброй B на множестве $\{b \in \mathfrak{B} | b \leq a\}$. Для любой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ и любой элементарной формулы $\varphi(x)$ сигнатуры системы $\mathfrak{A}$ через $\varphi(\mathfrak{A})$ обозначим множество $\{a \in \mathfrak{A} | \mathfrak{A} \models \varphi(a)\}$.

Теорема. В предположении обобщенной континуум гипотезы (ОКГ), число Левенгейма для свободного эпискелета многообразия булевых алгебр равно числу Левенгейма для полной логики второго порядка.

Доказательство. В силу отмеченного выше имеет место неравенство $\ell_{BA}^{\ll,*} \leq \ell^{II}$ и таким образом, в доказательстве нуждается лишь обратное неравенство $\ell^{II} \leq \ell_{BA}^{\ll,*}$.

Через $\mathfrak{K}_i$ обозначим класс алгебраических систем вида $\langle \omega_i \cup 2^{\omega_i} \cup \omega_i'; U, V, \in, g, f, a_1, \ldots, a_n \rangle$, где ω_i - произвольный ординал, 2^{ω_i} множество всех подмножеств множества ω_i, ω_i' - дизъюнктное с $\omega_i \cup 2^{\omega_i}$ множество мощности $\aleph_i$, $U(V)$ - одноместный предикат выделяющий элементы множества $\omega_i(\omega_i')$, $\in$ - двуместный предикат принадлежности между элементами ω_i и 2^{ω_i}, g - взаимно однозначное отображение множества ω_i на множество ω_i', f - взаимно однозначное отображение множества $\omega_i \times \omega_i'$ на $\omega_i, a_1, \ldots, a_n$ - некоторые константы принадлежащие 2^{ω_i}. Пусть $\mathfrak{K} = \cup_{i \in \mathrm{Ord}} \mathfrak{K}_i$ где Орд - класс всех ординалов.

Заметим, что ℓ^{II} является предельным кардиналом. Таким образом очевидно, что для доказательства неравенства $\ell^{II} \leq \ell_{\mathfrak{M}}^{\ll,*}$ достаточно построить такую систему формул сигнатуры $\langle \ll, * \rangle$: $S(x, \bar{y}), Q(x, z, \bar{y})$, $\Phi_1(x, \bar{y}), \Phi_2(x, \bar{y}), \Phi_3(x, z, \bar{y}), \Phi_4(x, z, \bar{y}), \Phi_5(x, z, u, \bar{y}), \Phi_6(\bar{y}, \bar{t})$ (здесь $\bar{y}$ - кортеж переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{23}$, $\bar{t}$ - кортеж $t_1, \ldots, t_n$), что:

A) для любого j, для любых элементов $c_1, \ldots, c_{23}, d_1, \ldots, d_n$ (соответствующие кортежи обозначим как $\bar{c}$ и $\bar{d}$) из $\mathfrak{IM}_{<\aleph_j}(\mathfrak{IM})$ таких, что $\langle \mathfrak{IM}_{<\aleph_j}; \ll, * \rangle \models \Phi_6(\bar{c}, \bar{d})(\langle \mathfrak{IM}; \ll, * \rangle) \models \Phi_6(\bar{c}, \bar{d}))$ указанные формулы определяют в скелете $\langle \mathfrak{IM}_{<\aleph_j}; \ll, * \rangle$ (в скелете $\langle \mathfrak{IM}; \ll, * \rangle$) алгебраическую систему $\mathfrak{A}_1 = \langle S(\mathfrak{IM}_{<\aleph_j}, \bar{c})/Q(x, z, \bar{c}); \Phi_1(x, \bar{c}), \Phi_2(x, \bar{c}), \Phi_3(x, z, \bar{c}), \Phi_4(x, z, \bar{c})$, $\Phi_5(x, z, u, \bar{c}), \bar{d} \rangle$) (систему $\mathfrak{A}_1 = \langle S(\mathfrak{IM}, \bar{c})/Q(x, z, \bar{c}); \Phi_1(x, \bar{c}), \ldots, \Phi_5(x, z, u, \bar{c})$,

$\bar{d}\rangle$) изоморфную некоторой системе из класса $\mathfrak{K}$ и при этом, естественно, если $|\mathfrak{A}_1| = 2^{\aleph_i} = \aleph_{i+1}$, to $2^{\aleph_i} = \aleph_{i+1} \leq \sum\limits_{\ell<j} 2^{\aleph_j} = \sum\limits_{\ell<j} \aleph_{\ell+1}$;

Б) для любого ординала i, для произвольной системы $\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}_i$ существует выбор параметров $\bar{c}, \bar{d} \in \mathfrak{IM}_{<\aleph_{i+2}}$ такой , что для любого $\aleph_j \geq \aleph_{i+2} \langle \mathfrak{IM}; \ll, \ *\rangle \models \Phi_6(\bar{c}, \bar{d})$, $\langle \mathfrak{IM}_{<\aleph_j}; \ll, *\rangle \models \Phi_6(\bar{c}, \bar{d})$ и $\langle S(\mathfrak{IM}, \bar{c})/Q(x, z, \bar{c})$; $\Phi_1(x, \bar{c}), \ldots, \quad \Phi_5(x, z, u, \bar{c}), \bar{d}\rangle \quad \cong \quad \langle S(\mathfrak{IM}_{<\aleph_j}, \bar{c})/Q(x, z, \bar{c}); \quad \Phi_1(x, \bar{c}), \ldots,$ $\Phi_5(x, z, u, \bar{c}), \bar{d}\rangle \cong \mathfrak{A}$.

Для любых лум $\langle A; \leq\rangle$, $\langle B; \leq\rangle$ через $\langle A; \leq\rangle \cdot \langle B; \leq\rangle$ обозначим их лексикографическое произведение, т.е. декартово произведение $A \times B$ множеств A и B порядок на котором определяется условием: $\langle a_1, b_1\rangle \leq \langle a_2, b_2\rangle$ тогда и только тогда, когда $b_1 \leq b_2$ или $b_1 = b_2$ и $a_1 \leq a_2$. Если $\langle B; \leq\rangle$ и $\langle A_b; \leq\rangle$ при $b \in B$ некоторые лум, то $\sum_{b\in B}\langle A_b; \leq\rangle$ является множеством $\cup_{b\in B} A_b$ (при условии, что $A_{b_1} \cap A_{b_2} = \emptyset$ для $b_1 \neq b_2$) линейный порядок на котором определен так: $a \leq c$ в $\sum_{b\in B}\langle A_b; \leq\rangle$, если либо $a, c \in A_b$ для некоторого $b \in B$ и $a \leq c$ в $\langle A_b; \leq\rangle$, либо $a \in A_{b_1}$, $c \in A_{b_2}$ и $b_1 < b_2$ в $\langle B; \leq\rangle$.

В работе Боннета [1], в предположении ОКГ, для любого ординала i построены лум L_i такие, что:

1) $|L_i| = \aleph_{i+1}$ и для любых $a < b \in L_i$ $|(a, b)| = \aleph_{i+1}$,

2) для любого $C \subseteq L_i$ и любого изотонного или антиизотонного отображения f лум C в лум L_i имеет место неравенство $|\{a \in C | f(a) \neq a\}| \leq \aleph_i$.

Пусть L^i_j $(j \in \omega_i + 2)$ - некоторая система открытых попарно дизъюнктных интервалов лум L_i. Тогда с помощью рассуждений аналогичных доказательствам работы [1] без труда доказываются следующие свойства булевых алгебр $B(1 + L^i_j + 1)$ (обозначим далее эти алгебры как $\mathfrak{B}^i_j$):

3) $|\mathfrak{B}^i_j| = \aleph_{i+1}$ и для любого $0 \neq a \in \mathfrak{B}^i_j \quad |\mathfrak{B}^i_j \restriction a| = \aleph_{i+1}$;

4) для любых $j_1 \neq j_2$ и любых булевых алгебр $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ являющихся подалгебрами алгебр $\mathfrak{B}^i_{j_1}, \mathfrak{B}^i_{j_2}$ соответственно, если для некоторой булевой алгебры $\mathfrak{B}$ имеет место $\mathfrak{B} \ll \mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B} \ll \mathfrak{B}_2$, то $|\mathfrak{B}| \leq \aleph_i$;

5) для любых j_1, j_2 и любого $C \subseteq L^i_{j_1}$, если для любых $a, b \in C$ $|(a, b)| = \aleph_{i+1}$ и h - некоторое вложение алгебры $B(C)$ в алгебру $\mathfrak{B}^i_{j_2}$, то $j_1 = j_2$ и h - тождественно.

Пусть алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle \omega_i \cup 2^{\omega_i} \cup \omega'_i; U, V, \in, g, f, a_1, \ldots, a_n\rangle \in \mathfrak{K}_i$. Переиндексируем множество $\{L^i_j | j \in \omega_i + 2\}$ так, чтобы роль индексного множества $\omega_i + 2$ играло теперь объединение дизъюнктных множеств $\omega_i + 2$

и ω_i'. Рассмотрим следующие лум:

$$M^1_{\mathfrak{A}} = 1 + \sum_{\langle k,\ell\rangle \in \omega_i \times \omega_i} [(L^i_{\omega_i} + 1 + L^i_k + 1 + L^i_{g(\ell)} + 1) \cdot \omega_{i+1} +$$
$$+ (L^i_{\omega_i+1} + 1 + L^i_{f(k,g(\ell))} + 1) \cdot \omega^*_{i+1}];$$
$$M^2_{\mathfrak{A}} = 1 + \sum_{k\in\omega_i} [(L^i_{\omega_i} + 1 + L^i_k + 1) \cdot \omega_{i+1} + (L^i_{\omega_i+1} + 1 + L^i_{g(k)} + 1) \cdot \omega^*_{i+1}];$$
$$M^3_{\mathfrak{A}} = 1 + \sum_{k\in\omega_i} [(L^i_{\omega_i} + 1 + L^i_k + 1) \cdot \omega_{i+1} + (L^i_{\omega_i+1} + 1)\omega^*_{i+1}];$$
$$M^4_{\mathfrak{A}} = 1 + \sum_{k\in\omega_i} [(L^i_{\omega_i} + 1) \cdot \omega_{i+1} + (L^i_{\omega_i+1} + 1 + L^i_{g(k)} + 1) \cdot \omega^*_{i+1}];$$
$$M^5_{\mathfrak{A}} = 1 + (L^i_{\omega_i} + 1) \cdot \omega_{i+1} + (L^i_{\omega_i+1} + 1) \cdot \omega^*_{i+1};$$
$$M^6_{\mathfrak{A}} = 1 + (L^i_{\omega_i} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_k + 1) \cdot \omega_{i+1} + (L^i_{\omega_i+1} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_{g(k)} + 1) \cdot \omega^*_{i+1};$$
$$M^7_{\mathfrak{A}} = 1 + (L^i_{\omega_i} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_k + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_{g(k)} + 1) \cdot \omega_{i+1} +$$
$$+ (L^i_{\omega_i+1} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_k + 1) \cdot \omega^*_{i+1};$$
$$M^8_{\mathfrak{A}} = 1 + (L^i_{\omega_i} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_k + 1) \cdot \omega_{i+1} + (L^i_{\omega_i+1} + 1) \cdot \omega^*_{i+1};$$
$$M^9_{\mathfrak{A}} = 1 + (L^i_{\omega_i} + 1)\omega_{i+1} + (L^i_{\omega_i+1} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_{g(k)} + 1) \cdot \omega^*_{i+1};$$

Пусть $\{\alpha_j | j \in \omega_{i+1}\}$ - совокупность всех лум (с точностью до изоморфизма) мощности не превосходящей $\aleph_i$. Положим $\gamma_i = \sum_{j\in\omega_{i+1}} (1 + \alpha_j + 1) + 1$. В частности, для любого лум L мощности не превосходящей $\aleph_i$ $1 + L + 1 \ll \gamma_i$ и для любого лум такого что $\beta \ll \gamma_i$, для любых $a, b \in \beta$ $|(a,b)| \le \aleph_i$.

Пусть ${}^{\omega_i}2$ - лекцикографически упорядоченное множество всех ω_i - последовательностей из 0 и 1. Напомним, что в ${}^{\omega_i}2$ нет подмножеств типа ω_{i+1} и ω^*_{i+1}. Пусть h - взаимно однозначное отображение ${}^{\omega_i}2$ на ω_{i+1}.

Для любого $m \in^{\omega_i} 2$ определим лум:

$$M^{10}_{\mathfrak{A}}(m) = 1 + (L^i_{\omega_i} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_k + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_{g(k)} + 1) \cdot h(m) + (L^1_{\omega_i} + 1 + \gamma_i +$$
$$+ 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_{g(k)} + 1) \cdot \omega_{i+1} + (L^i_{\omega_i} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_k + 1) \cdot \omega^*_{i+1};$$

$$
\begin{aligned}
M_{\mathfrak{A}}^{11} &= \sum_{m\in {}^{\omega_i}2} M_{\mathfrak{A}}^{10}(m) + 1;\\
M_{\mathfrak{A}}^{12}(m) &= 1 + (L^i_{\omega_i} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_k + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_{g(k)} + 1)\cdot h(m) + (L^i_{\omega_i} + 1 +\\
&\quad + \sum_{k\in\omega_i} L^i_k + 1 + \gamma_i + 1)\cdot\omega_{i+1} + (L^i_{\omega_i+1} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_k + 1)\cdot\omega^*_{i+1};\\
M_{\mathfrak{A}}^{13} &= \sum_{m\in {}^{\omega_i}2} M_{\mathfrak{A}}^{12}(m) + 1;\\
M_{\mathfrak{A}}^{14}(m) &= 1 + (L^i_{\omega_i} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_k + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_{g(k)} + 1)\cdot\omega_{i+1} + (L^i_{\omega_i+1} + 1 +\\
&\quad + \gamma_i + 1)\cdot\omega^*_{i+1} + (L^i_{\omega_i+1} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_k + 1)\cdot(h(m))^*;\\
M_{\mathfrak{A}}^{15} &= \sum_{m\in {}^{\omega_i}2} M_{\mathfrak{A}}^{14}(m) + 1;\\
M_{\mathfrak{A}}^{16}(m) &= 1 + (L^i_{\omega_i} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} +1)\cdot h(m) + (L^i_{\omega_i} + 1 + \gamma_i + 1)\cdot\omega_{i+1} +\\
&\quad + (L^i_{\omega_i+1} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_{g(k)} + 1)\cdot\omega^*_{i+1};\\
M_{\mathfrak{A}}^{17} &= \sum_{m\in {}^{\omega_i}2} M_{\mathfrak{A}}^{16}(m) + 1;\\
M_{\mathfrak{A}}^{18}(m) &= 1 + (L^i_{\omega_i} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_k + 1)\cdot\omega_{i+1} + (L^i_{\omega_i+1} + 1 + \gamma_i + 1)\cdot\omega^*_{i+1} +\\
&\quad + (L^i_{\omega_i+1} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_{g(k)} + 1)\cdot(h(m))^*;\\
M_{\mathfrak{A}}^{19} &= \sum_{m\in {}^{\omega_i}2} M_{\mathfrak{A}}^{18}(m) + 1;\\
M_{\mathfrak{A}}^{20} &= 1 + (L^i_{\omega_i} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_k + 1)\cdot h(m) + (L^i_{\omega_i} + 1 + \gamma_i + 1)\cdot\omega_{i+1} +\\
&\quad + (L^i_{\omega_i+1} + 1)\cdot\omega^*_{i+1};\\
M_{\mathfrak{A}}^{21} &= \sum_{m\in {}^{\omega_i}2} M_{\mathfrak{A}}^{20}(m) + 1;\\
M_{\mathfrak{A}}^{22}(m) &= 1 + (L^i_{\omega_i} + 1)\cdot\omega_{i+1} + (L^i_{\omega_i+1} + 1 + \gamma_i + 1)\cdot\omega^*_{i+1} +\\
&\quad + (L^i_{\omega_i+1} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_{g(k)} + 1)\cdot(h(m))^*;\\
M_{\mathfrak{A}}^{23} &= \sum_{m\in {}^{\omega_i}2} M_{\mathfrak{A}}^{22}(m) + 1;
\end{aligned}
$$

Напомним, что через $\bar{y}$ обозначен кортеж переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{23}$, через $\overline{B(M_{\mathfrak{A}})}$ обозначим кортеж булевых алгебр $B(M^1_{\mathfrak{A}}), B(M^2_{\mathfrak{A}}), \ldots$ $\ldots, B(M^{23}_{\mathfrak{A}})$.

Рассмотрим формулу $\Psi_1(x,\bar{y}) = (y_5 \ll x \ll y_2 \& x \ll y_6 \& x \not\ll y_{17} \& x \not\ll y_{19})$. Пусть $\langle \Im BA; \ll\rangle \models \Psi_1(\mathfrak{B}, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})})$ и пусть h и g - гомоморфизмы булевых алгебр $B(M^2_{\mathfrak{A}})$ на $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}$ на $B(M^5_{\mathfrak{A}})$ соответственно. Отождествляя, как указано выше, лум $M^2_{\mathfrak{A}}$ с соответствующим линейно упорядоченным подмножеством булевой алгебры $B(M^2_{\mathfrak{A}})$, получаем существование лум $L = h(M^2_{\mathfrak{A}})$ такого, что $\mathfrak{B} = B(L)$ и ограничение h на лум $M^2_{\mathfrak{A}}$ является гомоморфизмом лум $M^2_{\mathfrak{A}}$ на лум L. Любой гомоморфизм лум S на лум R естественным образом индуцирует изоморфное вложение лум R в лум S и, тем самым, лум L может быть отождествлено с некоторым подмножеством лум $M^2_{\mathfrak{A}}$. Рассмотрим теперь гомоморфизм g булевой алгебры $B(L)$ на алгебру $B(M^5_{\mathfrak{A}})$ и индуцированное им вложение ψ булевой алгебры $B(M^5_{\mathfrak{A}})$ в алгебру $B(L) \subseteq B(M^2_{\mathfrak{A}})$ (которое существует по хорошо известной ретрактивности интервальных булевых алгебр).

Назовем блоком T_k лум $M^2_{\mathfrak{A}}$ интервал этого лум порядкового типа $(L^i_{\omega_i}+1+L^i_k+1)\cdot\omega_{i+1}+(L^i_{\omega_i+1}+1+L^i_{g(k)}+1)\cdot\omega^*_{i+1}$. В силу свойства 5) булевых алгебр $\mathfrak{B}^i_j = B(L^i_j)$ нетрудно заметить, что каждый из интервалов $L^i_{\omega_i}$, $L^i_{\omega_i+1} \subseteq M^5_{\mathfrak{A}} \subseteq B(M^5_{\mathfrak{A}})$ отображается вложением ψ в подмножества лум $M^2_{\mathfrak{A}} \subseteq B(M^2_{\mathfrak{A}})$ имеющие только такой же тип. Кроме того, используя отделимость некоторым элементом булевой алгебры $B(M^2_{\mathfrak{A}})$ линейно упорядоченных подмножеств $(L^i_{\omega_i} + 1 + L^i_{k'} + 1) \cdot \omega_{i+1}$ и $(L^i_{\omega_i+1} + 1 + L^i_{g(k'')} + 1) \cdot \omega^*_{i+1}$ лум $M^2_{\mathfrak{A}}$ при $k' \neq k''$ и неотделимость подмножеств $(L^i_{\omega_i} + 1)\omega_{i+1}$ и $(L^i_{\omega_i+1} + 1)\omega^*_{i+1}$ лум $M^5_{\mathfrak{A}}$ с помощью элементов алгебры $B(M^5_{\mathfrak{A}})$ получаем, что все, кроме возможно малого (то есть мощности меньшей чем $\aleph_{i+1}$) числа, интервалы лум вида $\psi(L^i_{\omega_i})$, $\psi(L^i_{\omega_i+1})$ (при $L^i_{\omega_i}$, $L^i_{\omega_i+1} \subseteq M^5_{\mathfrak{A}}$) содержатся в одном из блоков T_{k_1} лум $M^2_{\mathfrak{A}}$. Так как каждое из $L^i_{\omega_i}$ отделимо от совокупности лум $L^i_{\omega_i+1}$ в $M^5_{\mathfrak{A}}$, то нетрудно видеть и то, что каждое из $L^i_{\omega_i}$, $L^i_{\omega_i+1} \subseteq M^5_{\mathfrak{A}}$ разбивается самое большое на малое (в указанном выше смысле) число интервалов таких, что их ψ - образы содержатся в каком-либо одном из интервалов вида $L^i_{\omega_i}$, $L^i_{\omega_i+1}$ указанного блока T_{k_1}. Эти рассуждения приводят к тому, что лум L обязано иметь вид

$$\text{(I)} \qquad X_L + \sum_{r\in\omega_{i+1}} (L^{ir}_{\omega_i} + 1 + A_r + 1) + \sum_{r\in\omega^*_{i+1}} (L^{ir}_{\omega_i+1} + 1 + B_r + 1) + Y_L,$$

где X_L, Y_L - некоторые лум, а $A_r(B_r)$ при $r \in \omega_{i+1}$ $(r \in \omega^*_{i+1})$ отождествимы с подмножествами малых сумм лум вида $(L^i_{\omega_i} + 1 + L^i_{k_1} + 1)$ $((L^i_{\omega_i+1} + 1 + L^i_{g(k_1)} + 1))$. Здесь $L^{ir}_{\omega_i}$, $L^{ir}_{\omega_i+1}$ - некоторые интервалы лум $L^i_{\omega_i}$, $L^i_{\omega_i+1}$ соответственно.

Неравенство $\mathfrak{B} = B(L) \ll B(M^6_{\mathfrak{A}})$ влечет, что лум X_L и Y_L являются гомоморфными образами некоторых малых сумм лум вида $(L^i_{\omega_i} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_k+1)$ или $(L^i_{\omega_i+1}+1+\sum_{k\in\omega_i} L^i_{g(k)}+1)$. В свою очередь, выполнимость на $\langle \Im BA; \ll \rangle$ формулы $\mathfrak{B} = B(L) \not\ll B(M^{17}_{\mathfrak{A}}) \& \mathfrak{B} = B(L) \not\ll B(M^{19}_{\mathfrak{A}})$ влечет существование кофинального в ω_{i+1} подмножества R_1 (коинициального в ω^*_{i+1} подмножества R_2) такого, что A_r при $r \in R_1$ (B_r при $r \in R_2$) содержат интервалы $A'_r (B'_r)$ мощности $\aleph_{i+1}$ изоморфные подмножествам лум $L^i_{k_1}$ $(L^i_{g(k_1)})$.

Через $\Psi_2(x, \bar{y})$ обозначим следующую формулу сигнатуры $\langle \ll \rangle : y_5 \ll x \ll y_1 \& x \ll y_7 \& x \not\ll y_{11} \& x \not\ll y_{13} \& x \not\ll y_{15}$. Аналогично тому как это проделано выше для формулы $\Psi_1(x, \bar{y})$ показывается, что для любой булевой алгебры $\mathfrak{B}$ такой , что $\langle \Im BA; \ll \rangle \models \Psi_2(\mathfrak{B}, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})})$ существует лум L такое, что $\mathfrak{B} \cong B(L)$ и

$$(2) \qquad L = Z_L + \sum_{r \in \omega_{i+1}} (L^{ir'}_{\omega_i} + 1 + C_r + 1) + \sum_{r \in \omega^*_{i+1}} (L^{ir'}_{\omega_i+1} + 1 + D_r + 1) + W_L,$$

где Z_L, W_L - являются гомоморфными образами некоторых малых сумм лум вида $(L^i_{\omega_i} + 1 + \sum_{k \in \omega_i} + 1 + \sum_{k \in \omega_i} L^i_{g(k)} + 1)$ и $(L^i_{\omega_i+1} + 1 + \sum_{k \in \omega_i} L^i_k + 1)$, а $C_r (D_r)$ при $r \in \omega_{i+1}$ $(r \in \omega^*_{i+1})$ отождествимы с подмножествами некоторых малых сумм лум вида $(L^i_{\omega_i} + 1 + L^i_{k_2} + 1 + L^i_{g(k_3)} + 1)$ $((L^i_{\omega_i+1} + 1 + L^i_{f(k_2, g(k_3))} + 1))$ для некоторых фиксированных $k_2, k_3 \in \omega_i$. При этом существуют кофинальные в ω_{i+1} (коинициальное в ω^*_{i+1}) подмножества R_3, $R_4 (R_5)$ такие, что C_r при $r \in R_3$ $(r \in R_4)$ и D_r при $r \in R_5$ содержат интервалы C'_r, D'_r мощности $\aleph_{i+1}$ изоморфные, соответственно, некоторым подмножествам лум $L^i_{k_2}$ $(L^i_{g(k_3)})$ и $L^i_{f(k_2, g(k_3))}$. Как и выше $L^{ir'}_{\omega_i}$, $L^{ir'}_{\omega_i+1}$ - интервалы лум $L^i_{\omega_i}$, $L^i_{\omega_i+1}$.

Через $\Phi_1(x, \bar{y})$ и $\Phi_2(x, \bar{y})$ обозначим соответственно формулы:

$$y_5 \ll x \ll y_3 \& x \ll y_8 \& x \not\ll y_{21},$$
$$y_5 \ll x \ll y_4 \& x \ll y_9 \& x \not\ll y_{23}.$$

Так же как и выше замечается следующее:
если $\langle \Im BA; \ll \rangle \models \Phi_1(\mathfrak{B}, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})})$, то существует L такое, что $\mathfrak{B} \cong B(L)$ и

$$(3) \qquad L = U_L + \sum_{r \in \omega_{i+1}} (L^{ir''}_{\omega_i} + 1 + E_r + 1) + (L^{ir''}_{\omega_i+1} + 1) \cdot \omega^*_{i+1} + V_L,$$

где U_L, V_L являются гомоморфными образами некоторых малых сумм лум вида $(L^i_{\omega_i} + 1 + \sum_{k \in \omega_i} L^i_k + 1)$ и $(L^i_{\omega_i+1} + 1)$, а E_r при $r \in \omega_{i+1}$ отождествимы с подмножествами некоторых малых сумм лум вида $(L^i_{\omega_i} + 1 + L^i_{k_4} + 1)$ для некоторого фиксированного $k_4 \in \omega_i$. При этом существует кофинальное в ω_{i+1} подмножество R_6 такое, что при $r \in R_6$ лум E_r содержит интервал E'_r мощности $\aleph_{i+1}$ изоморфный некоторому подмножеству лум $L^i_{k_4}$, а $L^{ir''}_{\omega_i}$, $L^{ir''}_{\omega_i+1}$ - интервалы лум $L^i_{\omega_i}$, $L^i_{\omega_i+1}$.

Если $\langle \Im BA; \ll\rangle \models \Phi_2(\mathfrak{B}, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})})$, то существует лум L такое, что $\mathfrak{B} \cong B(L)$ и

$$(4) \qquad L = S_L + (L^{ir'''}_{\omega_i} + 1) \cdot \omega_{i+1} + \sum_{r \in \omega^*_{i+1}} (L^{ir'''}_{\omega_i+1} + 1 + F_r + 1) + T_L,$$

где S_L, T_L являются гомоморфными образами некоторых малых сумм лум вида $(L^i_{\omega_i+1} + 1 + \sum_{k\in\omega_i} L^i_{g(k)} + 1)$ и $(L^i_{\omega_i} + 1)$, а F_r при $r \in \omega_{i+1}$ отождествимы с подмножествами некоторых малых сумм лум вида $(L^i_{\omega_i+1} + 1 + L^i_{g(k_5)} + 1)$ для некоторого фиксированного $k_5 \in \omega_i$. При этом существует коинициальное в ω^*_{i+1} подмножество R_7 такое, что при $r \in R_7$ лум F_r содержит интервал F'_r мощности $\aleph_{i+1}$ изоморфный некоторому подмножеству лум $L^i_{g(k_5)}$, а $L^{ir'''}_{\omega_i}$, $L^{ir'''}_{\omega_i+1}$ здесь интервалы лум $L^i_{\omega_i}$, $L^i_{\omega_i+1}$.

Заметим, что указанные для формул $\Psi_i(\mathfrak{B}, \ldots), \Phi_i(\mathfrak{B}, \ldots)$ ординалы k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 зависят от выбора булевой алгебры $\mathfrak{B}$ и обозначим далее эти k_j как $k_j(\mathfrak{B})$.

Через $\Psi_3(x, z, \bar{y})$ обозначим формулу:

$$\Phi_1(x, \bar{y}) \& \Phi_1(z, \bar{y}) \& \exists t(\Phi_1(t, \bar{y}) \& x \ll t \& z \ll t).$$

Из доказанного выше практически очевидно, что формула $\Psi_3(x, z, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})})$ определяет отношение эквивалентности $\sim_1$ на множестве $P_1 = \{\mathfrak{B} | \langle \Im BA; \ll\rangle \models \Phi_1(\mathfrak{B}, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})})\}$ и при этом для любых $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in P_1$ $\mathfrak{B} \sim_1 \mathfrak{C}$ тогда и только тогда, когда $k_4(\mathfrak{B}) = k_4(\mathfrak{C})$. Аналогично, формулой

$$\Psi_4(x, z, \bar{u}) = \Phi_2(x, \bar{y}) \& \Phi_2(z, \bar{y}) \& \exists t(\Phi_2(t, \bar{y}) \& x \ll t \& z \ll t)$$

при $\bar{y} = \overline{B(M_{\mathfrak{A}})}$ на множестве $P_2\{\mathfrak{B} | \langle \Im BA; \ll\rangle \models \Phi_2(\mathfrak{B}, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})})\}$ определяется отношение эквивалентности $\sim_2$ такое, что для $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in P_2$ $\mathfrak{B} \sim_2 \mathfrak{C}$ тогда и только тогда, когда $k_5(\mathfrak{B}) = k_5(\mathfrak{C})$.

Через $\Psi_5(x, \bar{y})$ обозначим формулу $x \ll y_3$ и пусть $P_3 = \{\mathfrak{B} | \langle \Im BA; \ll\rangle \models \Psi_5(\mathfrak{B}, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})})\}$. Через $\Phi_3(x, z, \bar{y})$ обозначим формулу $\Phi_1(x, \bar{y}) \& \Psi_5(z, \bar{y}) \& x \ll z$. Отношение $\sim_3$ определим на множестве P_3 с помощью формулы $\Psi_6(x, z, \bar{y}) = \Psi_5(x, \bar{y}) \& \Psi_5(z, \bar{y}) \& \forall t(\Phi_1(x, \bar{y}) \to [t \ll x \longleftrightarrow t \ll z])$. Через $S(x, \bar{y})$ обозначим формулу $\Phi_1(x, \bar{y}) \vee \Phi_2(x, \bar{y}) \vee \Psi_5(x, \bar{y})$. Пусть $\sim$ - эквивалентность опеределенная на множестве $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ и совпадающая на P_i соответственно с эквивалентностями $\sim_i$, т.е. на $\Im BA$ отношение $\sim$ определяется формулой $Q(x, z, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})})$, где $Q(x, z, \bar{y}) = \Psi_3(x, z, \bar{y}) \vee \Psi_4(x, z, \bar{y}) \vee \Psi_6(x, z, \bar{y})$.

В силу замеченного выше очевиден изоморфизм моделей :

$$\mathfrak{A}' = \langle S(\Im BA, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})})/Q(x, z, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})}); \Phi_1(x, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})}),$$
$$\Phi_2(x, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})}), \Phi_3(x, z, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})})\rangle =$$
$$\langle P_1 \cup P_2 \cup P_3/\sim; \Phi_1(x, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})}), \Phi_2(x, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})}), \Phi_3(x, z, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})})\rangle \cong$$
$$\cong \langle \omega_i \cup 2^{\omega_i} \cup \omega'_i; U, V, \in\rangle,$$

где $U(V)$ - предикат выделяющий множество ω_i (ω_i'), $\in$ - теоретико множественное отношение включения между элементами ω_i и 2^{ω_i}.

Для интерпретации функции g в модели $\mathfrak{A}'$ достаточно рассмотреть формулу $\Phi_4(x,z,\bar{y})$ равную $\Phi_1(x,\bar{y})\&\Phi_2(z,\bar{y})\&\exists t(\Psi_1(t,\bar{y})\&\exists t_1,$ $t_2(t_1 \ll t\&t_2 \ll t\&t_t \ll x\&t_2 \ll z\&t_1 \not\ll y_{21}\&t_2 \not\ll y_{23})$. Тогда, очевидно, что $\langle \Im BA;\ll\rangle \models \Phi_4(\mathfrak{B},\mathfrak{C},\overline{B(M_{\mathfrak{A}})})$ в том и только в том случае, когда $g(k_4(\mathfrak{B})) = k_5(\mathfrak{C})$. При этом на роль t годится алгебра $B(1+(L^i_{\omega_i}+1+L^i_{k_4(\mathfrak{B})}+1)\cdot\omega_{i+1}+(L^i_{\omega_i+1}+1+L^i_{g(k_4(\mathfrak{B}))}+1)\cdot\omega^*_{i+1})$, а на роль $t_1(t_2)$ - булева алгебра $B(\sum_{r\in R_6}(1+E_r)+1)(B(\sum_{r\in R_7}(1+F_r)+1))$, где лум $E_r(F_r)$ и множества $R_6(R_7)$ определены при рассмотрении формул $\Phi_1(x,\bar{y})$ $(\Phi_2(x,\bar{y}))$.

Формулу $\Phi_5(x,z,u,\bar{y})$ определим как:

$$\begin{gathered}\Phi_1(x,\bar{y})\&\Phi_2(z,\bar{y})\&\Phi_1(u,\bar{y})\&\exists t(\Psi_2(t,\bar{y}))\&\\ \exists t_1,t_2,t_3(t_1 \ll t\&t_2 \ll t\&t_3 \ll t\&t_1 \ll x\&t_2 \ll z\&\\ t_3 \ll u\&t_1 \not\ll y_{21}\&t_2 \not\ll y_{23}\&t_3 \not\ll y_{21})).\end{gathered}$$

Так же как и выше, нетрудно заметить, что $\langle \Im BA;\ll\rangle \models \Phi_5(\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2,$ $\mathfrak{B}_3,\overline{B(M_{\mathfrak{A}})})$ тогда и только тогда, когда $f(k_4(\mathfrak{B}_1),k_5(\mathfrak{B}_2)) = k_4(\mathfrak{B}_3)$.

Наконец для констант $a_j \in 2^{\omega_i}$ алгебраической системы $\mathfrak{A}$ определим лум

$$N^j_{\mathfrak{A}} = 1+\sum_{k\in a_j}[(L^i_{\omega_i}+1+L^i_k+1)\cdot\omega_{i+1}+(L^i_{\omega_i+1}+1)\cdot\omega^*_{i+1}].$$

Суммируя все сказанное имеем изоморфизм алгебраических систем $\mathfrak{A}'' = \langle S(\Im BA,\overline{B(M_{\mathfrak{A}})})/Q(x,z,\overline{B(M_{\mathfrak{A}})});\Phi_1(x,\overline{B(M_{\mathfrak{A}})}),\Phi_2(x,\overline{B(M_{\mathfrak{A}})}),$ $\Phi_3(x,z,\overline{B(M_{\mathfrak{A}})}),\Phi_4(x,z,\overline{B(M_{\mathfrak{A}})}),\Phi_5(x,z,u,\overline{B(M_{\mathfrak{A}})}),B(N^1_{\mathfrak{A}}),\ldots,B(N^n_{\mathfrak{A}})\rangle$ и $\mathfrak{A}$.

Очевидно так, же, что подобный изоморфизм имеет место и при замене $\Im BA$ на $\Im BA_{<k}$, где кардинал k таков, что $k \geq \aleph_{i+2}$.

Через $\Psi_7(\bar{y},\bar{t})$ обозначим элементарную формулу сигнатуры $\langle\ll\rangle$ такую, что для любого квазипорядка $\langle G;\ll\rangle$ для любых кортежей $\bar{g},\bar{h}$ элементов из G таких, что $\langle G;\ll\rangle \models \Psi_7(\bar{g},\bar{h})$ алгебраическая система $\langle S(G,\bar{g})/Q(x,z,\bar{g});\ \Phi_1(x,\bar{g}),\ \Phi_2(x,\bar{g}),\ \Phi_3(x,z,\bar{g}),\ \Phi_4(x,z,\bar{g}),\ \Phi_5(x,z,u,\bar{g}),\bar{h}\rangle$ изоморфна системе вида $\langle A\cup B\cup A';U,V,\in,g,f,a_1,\ldots,a_n\rangle$, где A - произвольное множество, $B \subseteq 2^A$, $A'\cap(A\cup B) = \emptyset$ и g - некоторое взаимно однозначное отображение A на A'. Предикаты U,V выдельяют, соответственно, подмножества A и A', $\in$ - отношение принадлежности между элементами A и B, f - взаимно однозначное отображение $A\times A'$ на A и элементы $a_1,\ldots,a_n$ принадлежат B. Очевидно, что $\langle \Im BA;\ll\rangle \models$ $\Psi_7(\overline{B(M_{\mathfrak{A}})},B(N^1_{\mathfrak{A}}),\ldots,B(N^n_{\mathfrak{A}}))$.

Через $F(\aleph_i)$ обозначим булеву алгебру Фреше на множестве $\aleph_i$ т.е. булеву алгебру конечных и ко-конечных подмножеств $\aleph_i$, через $P(A)$ - булеву алгебру всех подмножеств множества A. Рассмотрим следующие формулы сигнатуры $\langle\ll\rangle$:

$$\begin{aligned}
&T_0(x) = \forall y(y \ll x \vee x \ll y),\\
&T_1(x) = \rceil T_0(x)\&\forall y(y \ll x\&x \not\ll y \to T_0(y))\&\\
&\qquad \forall y(y \ll x\&x \ll y \to x = y),\\
&T_2(x) = \rceil T_1(x)\&\rceil T_0(x)\&\forall z(z \ll x\&x \not\ll z \to T_0(z) \vee T_1(z))\\
&\qquad \&\exists z(T_1(z)\&z \ll x\&x \not\ll z)\&\forall y(x \ll y\&y \ll x \to x = y).
\end{aligned}$$

Заметим, что $\langle\mathfrak{I}BA;\ll\rangle \models T_0(\mathfrak{B})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ - конечная булева алгебра. Действительно, истинность формулы $T_0(\mathfrak{B})$ для конечных $\mathfrak{B}$ очевидна и допустим обратное, т.е., что $\langle\mathfrak{I}BA;\ll\rangle \models T_0(\mathfrak{B})$. Допустим так же, что $\mathfrak{B}$ при этом бесконечна и пусть $|\mathfrak{B}| = \aleph_j$. Тогда для $\mathfrak{C} = F(\aleph_{j+1})$ $\mathfrak{C} \not\ll \mathfrak{B}$, а так как имеет место $\langle\mathfrak{I}BA;\ll\rangle \models T_0(\mathfrak{B})$, то получаем, что $\mathfrak{B} \ll \mathfrak{C}$. Но для любой булевой алгебры $\mathfrak{B}_1$ такой , что $\mathfrak{B}_1 \ll F(\aleph_\ell)$ для некоторого ординала ℓ, либо $\mathfrak{B}_1 \cong F(\aleph_k)$, где $k \le \ell$, либо $\mathfrak{B}_1$ - конечна. Таким образом, $\mathfrak{B} \cong F(\aleph_s)$ для $s \le j$. Пусть теперь $\mathfrak{C} = P(\aleph_j)$, тогда из мощностных соображений $\mathfrak{C} \not\ll \mathfrak{B}$ и так же очевидно, от противного, что $\mathfrak{B} \not\ll \mathfrak{C}$. Полученное противоречие с предподложением $\langle\mathfrak{I}BA;\ll\rangle \models T_0(\mathfrak{B})$ и доказывает, что $\langle\mathfrak{I}BA;\ll\rangle \models T_0(\mathfrak{B})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ - конечна.

Покажем теперь, что $\langle\mathfrak{I}BA;\ll\rangle \models T_1(\mathfrak{B})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B} \cong F(\aleph_0)$. Действительно, если $\rceil T_0(\mathfrak{B})$ то в $\mathfrak{B}$ можно выбрать бесконечное число дизюнктных элементов a_i $(i \in I)$ таких, что $\sup\limits_{i\in I} a_i$ есть единица $\mathfrak{B}$. Факторизуя $\mathfrak{B}$ таким образом, чтобы в факторе элементы a_i стали атомами, уже без труда замечаем, что из $\langle\mathfrak{I}BA;\ll\rangle \models T_1(\mathfrak{B})$ действительно следует изоморфизм $\mathfrak{B} \cong F(\aleph_0)$.

Аналогичным образом замечается, что если $\langle\mathfrak{I}BA;\ll\rangle \models T_2(\mathfrak{B})$, то либо $\mathfrak{B} \cong B(\omega+\omega+1)$, либо $\mathfrak{B} \cong F(\aleph_1)$.

Рассмотрим теперь формулу

$$\begin{gathered}
T_3(x) = T_2(x)\&\exists z(x \ll z\&\forall y_1, y_2[(y_1 \ll z\&y_2 \ll z\&\\
z \not\ll y_1\&z \not\ll y_2 \to (y_1 \ll y_2 \vee y_2 \ll y_1)\&(y_1 \ll y_2\&y_2 \ll y_1 \to y_1 = y_2))\&\\
\exists t(z \ll t\&t \ll z\&t \ne z)]).
\end{gathered}$$

Из замеченного о формуле $T_2(x)$ получаем, что $\langle\mathfrak{I}BA;\ll\rangle \models T_3(\mathfrak{B})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B} \cong B(\omega+\omega+1)$. Действительно, если $\mathfrak{B} \cong B(\omega+\omega+1)$, то роль z указанного в формуле $T_3(\mathfrak{B})$ играет счетная безатомная булева алгебра. Если же бы алгебра $\mathfrak{B}$ для которой истинна $T_3(\mathfrak{B})$ была бы изоморфна $F(\aleph_1)$, то требование на z состоящее в линейной упорядоченности относительно $\ll$ начального интервала определенного z влекло бы изоморфизм z одной из алгебр вида $F(\aleph_i)$, но для любой $\mathfrak{C}$ из посылки $F(\aleph_i) \ll \mathfrak{C}\&\mathfrak{C} \ll F(\aleph_i)$ следует изоморфизм $F(\aleph_i)$ и $\mathfrak{C}$. Таким образом, действительно $\langle\mathfrak{I}BA;\ll\rangle \models T_3(\mathfrak{B})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B} \cong B(\omega+\omega+1)$.

Через $T_4(x)$ обозначим формулу $\rceil T_0(x)\&\rceil\exists z(T_3(z)\&z \ll x)$. Очевидно, что $\langle \Im BA; \ll\rangle \models T_4(\mathfrak{B})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B} \cong F(\aleph_j)$ для некоторого ординала j.

Положим $\Psi_8(\bar{y})$ равной следующей формуле сигнатуры $\langle \ll, *\rangle : \forall x, z(T_4(x)\&\Phi_1(z,\bar{y}) \to \rceil(z \ll x * y_{21}))$. Заметим, что $\langle \Im BA; \ll, *\rangle \models \Psi_8(\overline{B(M_{\mathfrak{A}})})$. Действительно, если $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ таковы, что $\langle \Im BA; \ll, *\rangle \models T_4(\mathfrak{C})\&\Phi_1(\mathfrak{B}, \overline{B(M_{\mathfrak{A}})})$, то существует ординал j такой , что $\mathfrak{C} \cong F(\aleph_j)$ и существует лум L указанного выше вида (3) такое, что $\mathfrak{B} \cong B(L)$. Если бы имело место неравенство $B(L) \ll F(\aleph_j) * B(M^{21}_{\mathfrak{A}})$, то в булевой алгебре $F(\aleph_j) * B(M^{21}_{\mathfrak{A}})$ нашлась бы цепь L' порядкового типа $\sum_{r\in R_6} E'_r$, где E'_r, R_6 - лум из представления (3) лум L, то есть $R_6 \cong \omega_{i+1}$, $E'_r \subseteq L^i_{k_4(\mathfrak{B})}$ и $|E'_r| = \aleph_{i+1}$. Под цепью типа L' будем далее понимать цепь представимую в виде подобной суммы. Хорошо известно, что для любых булевых алгебр $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ их свободное произведение изоморфно булебой степени $\mathfrak{B}_1^{\mathfrak{B}_2}$. Таким образом отождествим $F(\aleph_j) * B(M^{21}_{\mathfrak{A}})$ с $B(M^{21}_{\mathfrak{A}})^{F(\aleph_j)}$. Каждому элементу $f \in B(M^{21}_{\mathfrak{A}})^{f(\aleph_j)}$ однозначно соответствует некоторый кортеж $\langle a^f_0, a^f_1, \ldots, a^f_{n(f)}, b^f_0, b^f_1, \ldots, b^f_{n(f)}\rangle$, где $n(f) \in \omega$, b^f_0, $b^f_1, \ldots, b^f_{n(f)}$- разбиение единицы алгебры $F_{\aleph_j}$, а $b^f_1, \ldots, b^f_{n(f)}$ - атомы этой алгебры, $a^f_\ell \in B(M^{21}_{\mathfrak{A}})$ и являются значениями функции f на элементах b^f_ℓ (при отождествлении последних с открыто-замкнутыми подмножествами стоуновского пространства $F(\aleph_j)^*$ булевой алгебры $F(\aleph_j)$), кроме того предполагаем, что $a^f_\ell \neq a^f_0$ при $\ell \geq 1$. Назовем a^f_0 стабилизатором f, а $\{b^f_1, \ldots, b^f_{n(f)}\}$ - носителем f. Через a^f, где $n \in \omega$, обозначим совокупность тех $f \in L'$ у которых носитель имеет мощность n, тогда $L' = \cup_{n\in\omega} T_n$. Так как $\aleph_{i+1}$ регулярный кардинал, то найдется $n \in \omega$ такое, что цепь T_n представима в виде $\sum_{r\in R'_6} E''_r$, где $R'_6 \subseteq R_6$ $E''_r \subseteq E'_r$ и $|R'_6| = |E''_r| = \aleph_{i+1}$ при $r \in R'_6$. В силу этого можно считать, что уже для исходной цепи L' носители всех элементов из L' имеют одну и ту же мощность n. Рассмотрим гомоморфизм φ цепи $L' \subseteq B(M^{21}_{\mathfrak{A}})^{F(\aleph_j)}$ в алгебру $B(M^{21}_{\mathfrak{A}})$ определенный следующим образом: для $f \in L'$ $\varphi(f) = a^f_0$ и рассмотрим два возможных случая: 1) $\varphi(L')$ имеет наибольший элемент в $B(M^{21}_{\mathfrak{A}})$, 2) тип кофинальности $\varphi(L')$ равен ω_{i+1}.

Пусть в первом случае наибольший элемент цепи $\varphi(L') \subseteq B(M^{21}_{\mathfrak{A}})$ есть a. Так как каждый конечный интервал цепи L' представим в виде ω_{i+1} - суммы подмножеств лум $L^i_{k_4(\mathfrak{B})}$ имеющих мощность $\aleph_{i+1}$, то такой же вид имеет и множество $\varphi^{-1}(a)$ и, отождествляя $\varphi^{-1}(a)$ с L', считаем далее, что для любого $f \in L'$ $\varphi(f) = a$. Выше уже доказывалось, что в булевой алгебре $B(M^{21}_{\mathfrak{A}})$ не сыществует цепей типа L', отсюда непосредственно получаем так же, что цепей типа L' нет ни в какой из булевых алгебр $B(M^{21}_{\mathfrak{A}})^m$. Пусть$f$ - произвольный элемент цепи L'. Отождествим лум $\{g \in L' | g \geq f\}$ с самой цепю L' и тогда, если A - носитель f, то $|A| = n$ и для любого атома B алгебры $F(\aleph_j)$ не входящего в A, любого $g \in L'$ $g(b) \geq a$. Так как алгебра $B(M^{21}_{\mathfrak{A}})^n$ не содержит цепей типа L', то найдутся элемент $g_1 \in L'$ и атом $b_1 \notin A$ такие, что $g_1(b_1) > a$. Пусть $L'' = \{h \in L' | h > g_1\}$. Цепь L'' имеет тот же тип, что и цепь L', а кроме того, так как для любого $h \in L''$ $h(b_1) > a$ и a - стабилизатор для элементов цепи L'', то b_1 входит в носители всех элементов из L''. В силу того, что L'' не вложима в $B(M_{\mathfrak{A}}^{21})^{n+1}$ найдутся $g_2 \in L''$ и атом $b_2 \notin A \cup \{b_1\}$ такие, что $g_2(b_2) > a$. Так же как выше замечаем, что все носители элементов цепи $L''' = \{h \in L'' | h > g_2\}$ содержат атом b_2, а сама цепь L''' имеет тот же тип, что и цепь L''. Продолжая этот процесс получаем цепь $L^{(n+2)} \subseteq L'$ и набор попарно различных атомов $b_1, \ldots, b_{n+1}$ такие, что носитель любого из элементов цепи $L^{(n+2)}$ содержит все атомы $b_1, \ldots, b_{n+1}$, что противоречит предположению о том, что носители любого элемента из L' имеют мощность n. Полученное противоречие доказывает невозможность случая 1).

Рассмотрим теперь случай когда тип кофинальности лум $\varphi(L') \subseteq B(M_{\mathfrak{A}}^{21})$ равен ω_{i+1}. Так как цепи типа L' не вложимы в алгебру $B(M_{\mathfrak{A}}^{21})$, то можно выбрать подцепь L'' цепи L' имеющую тот же тип, что и цепь L' и такую, что $\varphi(L'') \cong \omega_{i+1}$. Если при этом $\varphi(L'')$ есть множество $\{c_\ell | \ell \in \omega_{i+1}\}$ упорядоченное в $B(M_{\mathfrak{A}}^{21})$ в соответствии с порядком на индексах, то пусть $P_\ell = \{f \in L'' | \varphi(f) = c_\ell\}$ для $\ell \in \omega_{i+1}$. Таким образом можно считатьP_ℓ лум изоморфным подмножествам лум $L^i_{k_4(\mathfrak{B})}$ мощности $\aleph_{i+1}$. Выберем в каждом из лум P_ℓ по два элемента f_i^1, f_i^2 таких, что интервал (f_i^1, f_i^2) в цепи L'' является изоморфным некоторому подмножеству множества $L^i_{k_4(\mathfrak{B})}$ мощности $\aleph_{i+1}$. Тогда т.к. $\varphi(f_i^1) = \varphi(f_i^2)$ и носители f_i^1, f_i^2 состоят из n элементов, то лум $(f_i^1, f_i^2)^{L''}$ изоморфно вложимо в $\varphi_{N_i}(B(M_{\mathfrak{A}}^{21})^{F(\aleph_j)})$, где N_i - объединение носителей f_i^1 и f_i^2, а φ_A - проэкция $B(M_{\mathfrak{A}}^{21})^{F(\aleph_j)}$ по A для любого $A \in F(\aleph_j)$. Так как $\varphi_{N_i}(B(M_{\mathfrak{A}}^{21})^{F(\aleph_j)}) \cong B(M_{\mathfrak{A}}^{21})^{|N_i|}$ и $|\varphi_{N_i}((f_i^1, f_i^2)^{L''})| = \aleph_{i+1}$, то найдется атом b_i алгебры $F(\aleph_j)$ из элемента N_i такой , что $|\varphi_{b_i}((f_i^1, f_i^2)^{L''})| = \aleph_{i+1}$. Так как цепи типа L'' не вложимы в булевы алгебры $B(M_{\mathfrak{A}}^{21})^m$ для любого $m \in \omega$, то найдутся бесконечно много различных $b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}, \ldots (n \in \omega)$ для $i_1, \ldots, i_n, \dots \in i \in \omega_{i+1}$. Пусть $j_1 \in \omega_{i+1}$ и $j_1 > i_n$ для всех $n \in \omega$. Заметим, что для каждого $n \in \omega$ $\varphi_{b_n}((f_{i_n}^1, f_{i_n}^2)^{L''})$ - подмножество мощности $\aleph_{i+1}$ изоморфно вложимое в $B(M_{\mathfrak{A}}^{21}) \restriction f_{i_n}^2(b_{i_n})$, а значит и в $B(M_{\mathfrak{A}}^{21}) \restriction f_{j_1}(b_{i_n})$. Так как число различных b_{i_n} бесконечно, то для одного из $n \in \omega$ $f_{j_1}(b_{i_n})$ есть стабилизатор элемента f_{j_1}, т.е. $f_{j_1}(b_{i_n}) = \varphi(f_{j_1})$ и, значит, в $B(M_{\mathfrak{A}}^{21}) \restriction \varphi(f_{j_1})$ изоморфно вложимо подмножество лум $L^i_{k_4(\mathfrak{B})}$ имеющее мощность $\aleph_{i+1}$. Итерируя этот процесс ω_{i+1} раз получаем вложение цепи типа L' в булеву алгебру $B(M_{\mathfrak{A}}^{21})$. Полученное противоречие доказывает невозможность и случая 2). Тем самым доказано, что действительно алгебра $\mathfrak{B}$ не является гомоморфным образом алгебры $F(\aleph_j) * B(M_{\mathfrak{A}}^{21})$, т.е. $\langle \mathfrak{I}BA; \ll, * \rangle \models \Psi_8(\overline{B(M_{\mathfrak{A}})})$.

Через $\Psi_9(\bar{y})$ обозначим формулу $\forall x, z, t(\Phi_1(x, \bar{y}) \& \Phi_1(z, \bar{y}) \& \rceil Q(x, z, \bar{y}) \& t \ll x \& t \ll z \to t \ll y_{23})$. Из отмеченного выше строения лум вида (3) вытекает, что $\langle \mathfrak{I}BA; \ll \rangle \models \Psi_9(\overline{B(M_{\mathfrak{A}})})$. Итак, на кортеже $\overline{B(M_{\mathfrak{A}})}$,

$B(N^1_{\mathfrak{A}}),\ldots,B(N^n_{\mathfrak{A}})$ в $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle$ истинна формула $\Phi_6(\bar{y},\bar{t})=\Psi_7(\bar{y},t)\&\Psi_8(\bar{y})\&\Psi_9(\bar{y})$. Аналогичное утверждение верно и для $\langle\mathfrak{I}BA_{<\aleph_k};\ll,*\rangle$ при $k\geq i+2$. Таким образом, в силу отмеченной выше изоморфности алгебраических систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}''$, утверждение Б) из начала доказательства теоремы имеет место.

Тем самым, для завершения доказательства теоремы остается показать справедливость утверждения А), то есть, что для любых кортежей элементов $\bar{c},\bar{d}$ из $\mathfrak{I}BA_{<\aleph_i}$ (j - произвольный ординал) таких, что $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle\models\Phi_6(\bar{c},\bar{d})$ ($\langle\mathfrak{I}BA_{<\aleph_j};\ll,*\rangle\models\Phi_6(\bar{c},\bar{d})$) указанным выше способом формулы $S(x,\bar{c}),\ldots,\Phi_5(x,z,u,\bar{c})$ и константы $\bar{d}$ определяют на $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle$ (на $\langle\mathfrak{I}BA_{<\aleph_j};\ll,*\rangle$) алгебраическую сустему класса $\mathfrak{K}$, т.е. с учетом построения формулы $\Psi_7(\bar{y},\bar{t})$, достаточно показать, что для любого подмножества $P\subseteq\Phi_1(\mathfrak{I}BA,\bar{c})/Q(x,y,\bar{c})$ существует булева алгебра $\mathfrak{B}$ такая, что $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle\models S(\mathfrak{B},\bar{c})\&\rceil\Phi_1(\mathfrak{B},\bar{c})\&\rceil\Phi_2(\mathfrak{B},\bar{c})$ и удовлетворяющая условию: для любой булевой алгебры $\mathfrak{C}$ такой , что $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle\models\Phi_1(\mathfrak{C},\bar{c})$ требования $\mathfrak{C}/Q(x,z,\bar{c})\in P$ и $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle\models\Phi_3(\mathfrak{C},\mathfrak{B},\bar{c})$ эквивалентны. Аналогичное утверждение требуется доказать и при замене $\mathfrak{I}BA$ на $\mathfrak{I}BA_{<\aleph_j}$, но, в силу аналогичности доказательств, рассмотрим лишь случай $\mathfrak{I}BA$. Пусть $\mathfrak{B}_p$ ($p\in P$) - некоторая система представителей из всех классов $Q(x,z,\bar{c})$ - эквивалентности являющихся элементами множества P. Через $\mathfrak{B}(P)$ обозначим такую булеву алгебру, что для любого $p\in P$ в $\mathfrak{B}(P)$ существует элемент b_p со свойствами: $\mathfrak{B}(P)\restriction b_p\cong\mathfrak{B}_p$, для $p_1\neq p_2\in P$ $b_{p_1}\cap b_{p_2}=0$ и $\mathfrak{B}(P)$ порождается элементами алгебер $\mathfrak{B}(P)\restriction b_p$ когда $p\in P$. Из определения формулы $\Phi_3(x,z,\bar{c})$ очевидно, что $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle\models\Phi_3(\mathfrak{B}_p,\mathfrak{B}(P),\bar{c})$ для любого $p\in P$. С другой стороны, если $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle\models\Phi_3(\mathfrak{C},\mathfrak{B}(P),\bar{c})$ для некоторой алгебры $\mathfrak{C}$, то $\mathfrak{C}\ll\mathfrak{B}(P)$ и, значит, исходя из построения $\mathfrak{B}(P)$, существует совокупность элементов d_p ($p\in P$) булевой алгебры $\mathfrak{C}$ таких, что $\mathfrak{C}\restriction d_p\ll\mathfrak{B}(P)\restriction b_p$, для $p_1\neq p_2\in P$ $d_{p_1}\cap d_{p_2}=0$ и $\mathfrak{C}$ порождается элементами алгебр $\mathfrak{C}\restriction d_p$ (при $p\in P$). Так как $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle\models\Phi_9(\bar{c})$ и $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle\models\Phi_1(\mathfrak{C},\bar{c})$, то в случае, если $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle\models\rceil Q(\mathfrak{C},\mathfrak{B}_p)$ для всех $p\in P$, для каждого такого $p\in P$ имеет место неравенство $\mathfrak{C}\restriction d_p\ll c_{21}$. Пусть $\mathfrak{C}_1$ - булева алгебра такая, что для любого $p\in P$ в $\mathfrak{C}_1$ существует элемент c_p со свойствами: $\mathfrak{C}_1\restriction c_p\cong c_{21}$, для $p_1\neq p_2\in P$ $c_{p_1}\cap c_{p_2}=0$ и $\mathfrak{C}_1$ порождается элементами алгебр $\mathfrak{C}\restriction c_p$ когда $p\in P$. В силу доказанных неравенств $\mathfrak{C}\restriction d_p\ll c_{21}$ имеет место неравенство $\mathfrak{C}\ll\mathfrak{C}_1$. С другой стороны очевидно, что $\mathfrak{C}_1\ll c_{21}*F(\aleph_k)$, где $\aleph_k=|P|$ и, значит, $\mathfrak{C}\ll c_{21}*F(\aleph_k)$. Но в то же время последнее неравенство противоречит истинности формулы $\Psi_8(\bar{c})$ на $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle$. Итак, действительно, для булевых алгебр $\mathfrak{C}$ таких, что $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle\models\Phi_1(\mathfrak{C},\bar{c})$ условия $\mathfrak{C}/_{Q(x,z,\bar{c})}\in P$ и $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle\models\Phi_3(\mathfrak{C},\mathfrak{B}(P),\bar{c})$ эквивалентны, т.е. для любых параметров $\bar{c},\bar{d}\in\mathfrak{I}BA$ таких, что $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle\models\Phi_6(\bar{c},\bar{d})$ формулы $S(x,\bar{c}),\ldots,\Phi_5(x,z,u,\bar{c})$ интерпретируют в $\langle\mathfrak{I}BA;\ll,*\rangle$ алгебраические системы класса $\mathfrak{K}$. В итоге утверждение А), а вместе с ним и теорема полностью доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bonnet R., *Very strongly rigid boolean algebras, continuum discrete set condition, countable antichain condition (I)*, Alg. univ. **11** (1980), 341-364.

[2] Пинус А.Г., *Об отношениях вложимости и эпиморфности на конгруэнц-дистрибутивных многообразиях*, Алгебра и логика **24** (1985), 588-607.

[3] Пинус А.Г., *Конгруэнц-модулярные мнохообразия алгебр*, Издательство Иркутского гос. университета, Иркутск, 1986.

[4] Пинус А.Г., *Об операции декартова произведения*, Известия вузов. Математика (1983), 51-53.

[5] Пинус А.Г., *Элементарная теория скелетов эпиморфности конгруэнц-дистрибутивных многообразий* , Известия вузов. Математика, (1989), 14-17.

[6] Пинус А.Г., *Элементарная теория скелетов вложимости дискриминаторных многообразий* , Сибирский математический журнал **32** (1991), 126-131.

[7] Пинус А.Г., *Числа Левенгейма для скелетов многообразий* , Алгебра и логика **30** (1991), 214-225.

[8] Vaananen J., *Set-theoretic definability of logics*, *Model-theoretic logics*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1985, pp. 599-643.

А. Г. Пинус
Новосибирский электротехнический институт
проспект К. Маркса 20
630092 Новосибирск
Россия